

¿Qué pasa con el infinito?

Carlos Imaz Jahnke

Introducción

De alguna manera, una idea o concepción de lo infinito podemos encontrarla presente en la mente de todos y así vemos que esta idea aparece, con matices y grados diversos, en filosofía, en literatura, en teología, en física, etc., pero señaladamente en matemáticas. Sin embargo, a pesar de esta omnipresencia y relevancia, sobre todo en el caso de las matemáticas, que es el caso que nos concierne aquí, no disponemos de una propuesta de tratamiento categórico del concepto que sea verdaderamente concordante con el papel que desempeña. A guisa de contraste, tenemos que los números llamados negativos, al igual que los imaginarios, tienen constancias de naturalización matemática (a través de las construcciones del anillo de los enteros y del campo de los números complejos) que les permite un libre tránsito, no sólo en matemáticas, pero también en otros terrenos como la física. Por desgracia, no sucede algo similar con el infinito, pues a pesar de la construcción cantoriana de los números transfinitos que, si bien es cierto, logra una forma de categorizar las nociones de cardinalidad y ordinalidad hacia terrenos del infinito, no consigue integrar el concepto con áreas donde éste subyace de manera fundamental, como sucede con el análisis diferencial e integral y menos transitar hacia la física, donde ese análisis es herramienta básica. De hecho, la situación se ve claramente reflejada por la casi nula influencia de los transfinitos en tales áreas, con la posible excepción de los conceptos de conjuntos numerables y no numerables, conceptos que no requieren de tanto bagaje teórico para hacerse explícitos.

El Dr. Carlos Imaz Jahnke es investigador emérito del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Con el propósito de analizar esta situación de manera somera, voy a permitirme exhibir algunas opiniones que han sido exteriorizadas, algunas por matemáticos y filósofos bien conocidos, otras vía vox populi, acerca del infinito, las cuales demuestran lo escurridizo de un tema debido a que se adolece de un sustento categórico que permita enmarcar las discusiones y eliminar la injerencia de matices subjetivos, por más pertinentes que puedan parecer. Una extensa gama de observaciones filosóficas, que se han dado y se dan, respecto al infinito matemático pueden consultarse en el excelente libro de Robles¹. Finalmente presentaré una propuesta para enfrentar el problema, desarrollada con otros colegas, no con la pretensión de eliminar todas las discrepancias, pero sí con la de abrirle al infinito una puerta para entrar de forma pertinente y natural en las matemáticas cotidianas, de manera que se puedan desarrollar áreas como el análisis diferencial e integral y zanjar muchas de esas discrepancias.



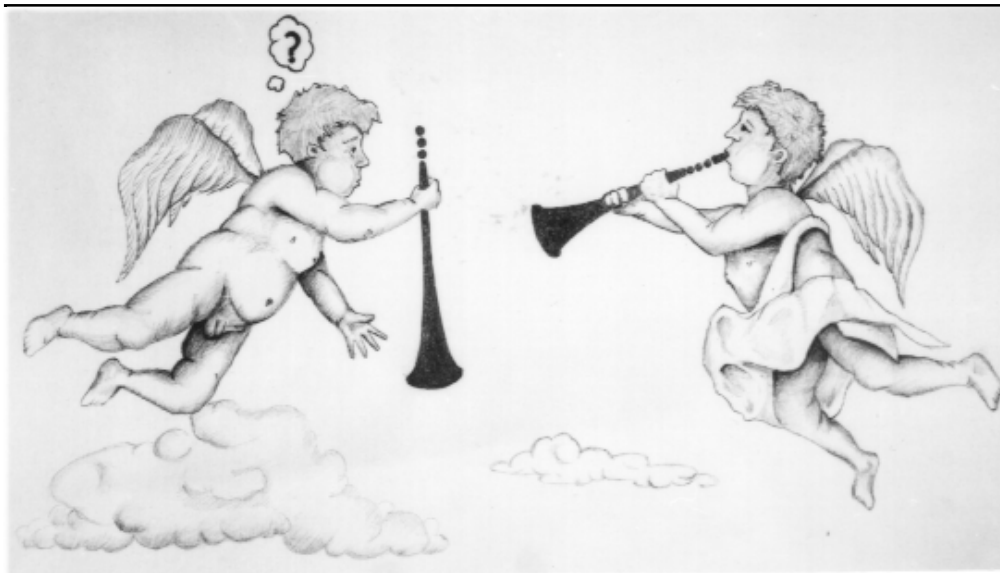
Algunas percepciones sobre el infinito

Comencemos citando a Russell² quien en el año 1901 comentaba: "La filosofía de lo infinitesimal, como acabamos de ver, es básicamente negativa. La gente creía en ella y hoy se han dado cuenta de su error. La filosofía del infinito, por el contrario, es totalmente positiva". En el escrito de Russell, antes de llegar al párrafo que hemos reproducido, se argumentaba que un algo de malicia, la noción de infinitesimales y una visión atomística del mundo nos llevaban a la conclusión de que las paradojas de Zenón no eran tales, y por lo tanto, nada se mueve en este mundo, lo cual choca con nuestras intuiciones primarias y justifica, para Russell, el adjetivo de negativa a la concepción de lo infinitesimal. Pasado ese párrafo, Russell comentaba sobre la entonces reciente construcción de los transfinitos por Cantor y, al no encontrar contradicciones, le adjudica el calificativo de totalmente positiva a la concepción del infinito, pero solamente como infinitamente grande. Sin embargo, escasamente dos años después, en su libro *The Principles of Mathematics*³, el mismo Russell sugiere una definición concomitante de infinitamente pequeño e infinitamente grande, al proponer que: dadas dos magnitudes a y b , diremos que b es infinitamente mayor que a , o recíprocamente, a es infinitamente menor que b , si para todo entero positivo

n se cumple siempre la relación $a \cdot n < b$. Esto es, negando la llamada propiedad arquimediana entre magnitudes, postula una concepción del infinito que conlleva las nociones de infinitesimal (infinitamente pequeño) e infinito (infinitamente grande), una de las cuales, según él mismo, lleva a contradicciones ineludibles.

Pero un caso más notorio aún, por tratarse de quien se trata, es el del mismo Cantor quien, bordeando en la imprecación, acusa a colegas que se proponen construcciones de infinitesimales "de querer infectar a las matemáticas con el bacilo del cólera de los infinitesimales". Según nos recuerda Robinson⁴, en su aparente desesperación por desterrar a los infinitesimales, Cantor "...llegó incluso a declarar que podía demostrar la imposibilidad de la existencia de los infinitesimales". De hecho la demostración que propone es claramente circular. En un libro reciente, *Infinity and the Mind*⁵, el autor comenta, con relación a los desplantes de Cantor, que "su situación puede compararse con la de un diputado mariguano que favorece la penalización severa del uso de heroína". Quizás esto suene como un impropio, pero no cabe duda de que unas cosas llevan a otras.

A muchos matemáticos educativos les gusta inquirir entre estudiantes, de niveles medio y superior, sobre la relación que existe entre el número 1 y la expresión deci-



mal $0.999\dots$ (ad infinitum) y, entre fascinados y estupefactos, constatan que la respuesta menos frecuente es: "son iguales", respuesta que es la esperada en términos de los contenidos curriculares a los que han estado expuestos dichos estudiantes, con lo cual refuerzan la idea del obstáculo que se debe enfrentar con la noción de límite. El que esta noción presenta dificultades es algo que nadie pone en duda, pero resulta que si tenemos un modelo de recta numérica debidamente enriquecido, como el que expondremos más adelante, entonces existen puntos p , de esta nueva recta, tales que su posición está a la izquierda del 1 (esto es, son menores que 1), y sin embargo las expresiones decimales $0.999\dots$ (sin importar cuantos nueves contengan) están situadas a la izquierda de p . En otras palabras, si alguien tiene en mente un modelo similar, la respuesta correcta es que $0.999\dots$ (ad infinitum) es, en sentido estricto, menor que 1, ya que ninguna de las expresiones decimales parciales alcanza a rebasar el punto p . En efecto, para ellos la teoría usual de límites no es solamente un obstáculo, es, de hecho, causante de confusiones.

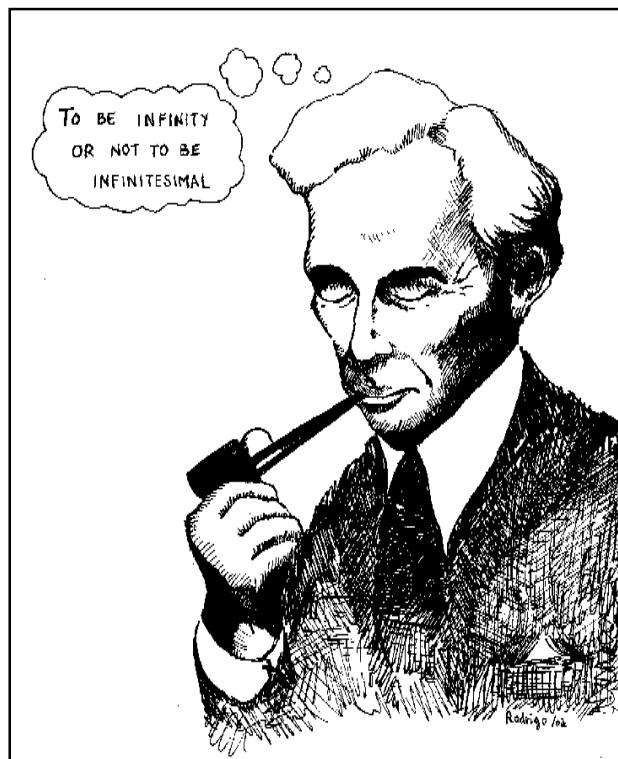
Dudas interpretativas de este estilo se han presentado a todo lo largo de la historia de las matemáticas. Por ejemplo, a mediados del siglo XVII, el matemático John Wallis y el filósofo Thomas Hobbes escenificaron varias controversias alrededor de temas matemáticos⁶, entre ellas una sobre la naturaleza de la trompeta hiperbólica infinita. Esta trompeta se construye a partir del gráfico de la hipérbola $y = 1/x$, para valores de x mayores de 1, si lo

hacemos girar alrededor del eje x . Cualquier estudiante de cálculo puede comprobar que el área superficial de la trompeta es infinita, esto es, que a medida que recorremos la trompeta hacia la derecha su área superficial crece sin límite; sin embargo, su volumen interior es finito, de hecho vale π ; aparte de esta característica, que puede parecer chocante, pero que es fácilmente explicable por medio de argumentos tradicionales, tiene otras: la mentada trompeta no tiene boquilla, es decir, no hay lugar donde ponerla; tampoco tiene centro de gravedad. Propiedades como éstas le resultan irritantes a un filósofo social como Hobbes, quien así se lo hace saber al matemático Wallis, y éste ofrece la aclaración siguiente: "un sólido o superficie, puede suponerse constituido de tal manera que, es infinitamente largo pero finitamente grande y no tener centro de gravedad, ...como sucede con los descubiertos por Wallis (yo), Fermat y otros. Pero entenderlo requiere de más conocimientos de geometría y de lógica de los que dispone el señor Hobbes". La respuesta de Hobbes es ciertamente digna de la aclaración ofrecida: "...no se requiere (para entenderlo) que el hombre sea un geómetra o un lógico, pero sí que esté loco". En lo único que coinciden es en la necesidad de cualidades especiales para entender. Lo que Hobbes planteaba como problema, y en lo cual muchos coincidimos con él, es en la manera de darle carta de "existencia" a "objetos" como la trompeta hiperbólica infinita o a la expresión decimal $0.999\dots$ (ad infinitum).

Como botón de muestra más contemporáneo me referiré a un correo, fechado en septiembre de 1998, que apareció en la página electrónica denominada MATH-HISTORY-LIST, en el cual un profesor universitario de matemáticas solicitaba información sobre la existencia de teorías acerca de "infinitésimos" y de "indivisibles" y sobre las diferencias entre estos entes. El correo había permanecido sin provocar ningún comentario, ello en un medio donde éstos se dan día con día, por cerca de seis meses, hasta el momento en que lo leí e hice mis observaciones a las preguntas. No importa, para el desarrollo de esta anécdota, cuál fue el tenor de mis comentarios, lo notable es que la reacción electrónica fue instantánea y una catarata de correos hizo patentes la vigilancia latente y la diversidad de opiniones que había respecto al tema (¿nadie quiso ser el primero en aventurarse?), así como las tajantes divergencias, notablemente en relación al asunto de los indivisibles. Los muy motivados pueden consultar directamente la página respectiva en Internet⁷.

Una propuesta

Creo haber ilustrado, desde luego no de manera exhaustiva, pero al menos de manera aceptablemente sugerente, la inestabilidad con la cual el barco del infinito navega, prácticamente al garete, en el mar de las matemáticas. Veamos ahora una posible maniobra, sugerida por el filósofo Ludwig Wittgenstein, para poder enderezar el rumbo, la cual, hasta donde sabemos, no ha sido tomada en cuenta por quienes han abordado la cuestión. En la recolección de anotaciones de Wittgenstein⁸, la numerada como 273, hace referencia a un comentario del matemático G. Hardy (contemporáneo y colega universitario de Wittgenstein) en el sentido de que la expresión "lo finito no puede entender lo infinito", muy del gusto de los matemáticos durante la transición del siglo XIX al XX, debe, con seguridad, ser considerada como un grito de guerra teológico pero no matemático. Al respecto, Wittgenstein comenta: "Ciertamente esta expresión es torpe... la gente quiere decir con ella: ¡aquí no debe haber gato encerrado! ¿De dónde este salto de lo finito a lo infinito? ...cómo concibe (el cálculo) lo infinito bien valdría la pena investigarlo... al modo como un contador público investiga cuidadosamente y clarifica la marcha de los negocios que se han emprendido... un examen sinóptico-descriptivo de todas las aplicaciones,

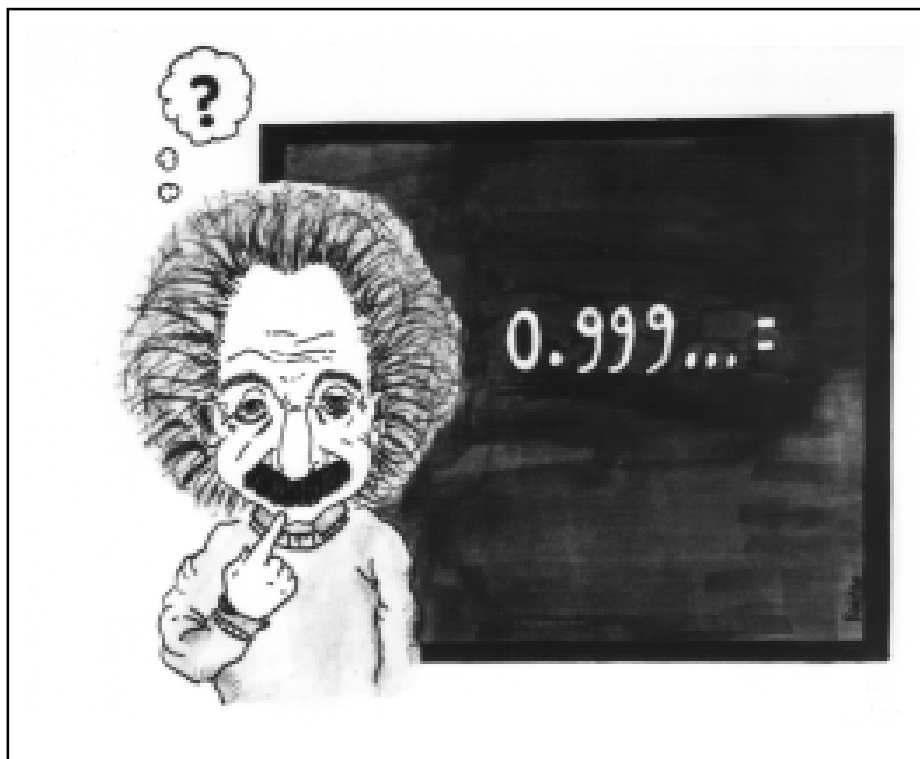


R. Imaz Alarcón

ilustraciones, concepciones, etc., del cálculo." Por desgracia, no he encontrado en la obra de Wittgenstein otra referencia relacionada con este asunto. El comentario es interesante, entre otras cosas, por el hecho de venir de un filósofo quien fuera discípulo de Russell, al que éste no parecía tener en muy alta estima. Ciertamente es en el área del cálculo (diferencial e integral) donde el infinito juega un papel más conspicuo, sin ser, desde luego, la única. Pero también es cierto que en esa área matemática, sobre todo después de su "aritmización" a finales del siglo XIX, el concepto juega un papel un tanto latente, implícito, fuera de toda posibilidad de manejos propiamente aritméticos que pudiesen ser objetos de un examen como el que, aparentemente, está sugiriendo Wittgenstein. Estaríamos en la situación de tratar de encontrar las cualidades de un objeto dentro de un área que, de alguna manera, lo ha disfrazado. En consecuencia, hemos decidido seguir un camino diferente según describiremos en la parte siguiente de este escrito.

Otra propuesta

Con este propósito vamos a definir el concepto de campo \mathbb{N} . Un campo \mathbb{N} es una estructura "numérica" que tiene



R. Imaz Alarcón

las mismas características algebraicas que el campo \mathcal{R} de los números reales y con la condición de que éstos se encuentran naturalmente inmersos en el primero. Esto es, $\tilde{\mathcal{N}}$ es una ampliación de \mathcal{R} , tal como el campo $\hat{\mathcal{A}}$ de los números complejos es una ampliación de los reales, pero con el añadido de que $\tilde{\mathcal{N}}$ conserva el orden lineal de \mathcal{R} , cosa que no sucede con $\hat{\mathcal{A}}$, así $\tilde{\mathcal{N}}$ es, con pleno derecho, una recta, pero más larga y más densamente poblada que \mathcal{R} . Además, $\tilde{\mathcal{N}}$ está compuesto de tres tipos de "números", positivos y correspondientemente negativos, separados por 0, que son: números pequeños (i, j, k, \dots), números finitos (a^*, b^*, c^*, \dots), y números grandes ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$), de manera que se cumplen (entre otras) las condiciones:

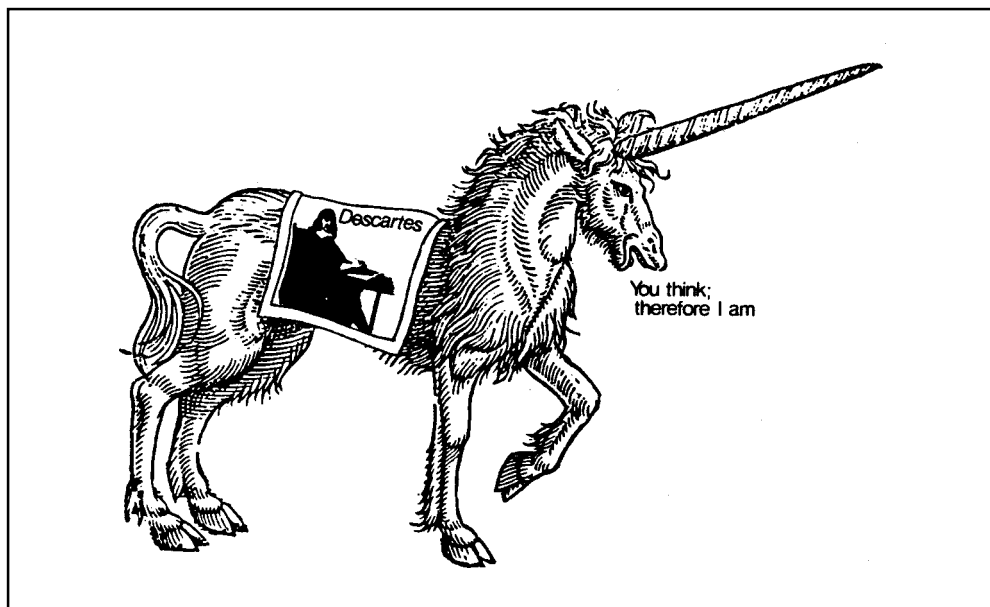
- (1) $0 < i < a^* < \alpha$,
- (2) $a^* = a + i$ (a real),
- (3) hay enteros grandes,
- (4) todo intervalo se puede i cubrir.

En palabras: (1) significa que cualquier pequeño i es menor que cualquier finito a^* y éste menor que cualquier grande α ; (2) nos dice que cualquier finito a^* difiere de un real a por un pequeño i (o coinciden), este real a se

llama parte real de a^* ; (3) señala que entre los grandes existe una parte que es ampliación de los enteros, esto es, conforman una estructura algebraicamente cerrada y discretamente colocada en $\tilde{\mathcal{N}}$; (4) nos dice que dados cualquier intervalo en $\tilde{\mathcal{N}}$ y cualquier pequeño i , aquél se puede cubrir con intervalos de longitud i , en general con un número grande de ellos. Algunos podrán preguntarse si tales campos existen, la respuesta es que sí y, además, que no son únicos. Para concretar proponemos uno: sea ω un símbolo (si el lector lo prefiere, puede pensar que ω es un cardinal transfinito cualquiera) y consideremos los "polinomios" $\mathbf{P}(\omega)$ de la forma:

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a_0$$

donde los coeficientes a_j son números reales cualesquiera salvo por el caso del coeficiente libre, a_0 , que debe ser un número entero. Este conjunto de polinomios es un dominio entero (de hecho, conforma la ampliación de los enteros arriba mencionada) y su campo de cocientes es un $\tilde{\mathcal{N}}$, cuyos elementos son (clases de equivalencia de) fracciones $\mathbf{P}(\omega)/\mathbf{Q}(\omega)$; los elementos son pequeños si el grado de \mathbf{P} es menor que el de \mathbf{Q} , finitos si los grados son iguales y grandes si el grado de \mathbf{P} es mayor al de \mathbf{Q} .



De manera muy escueta ilustraremos una forma de usar \mathbb{N} para desarrollar los conceptos del cálculo, otra opción puede ser consultada en la referencia 9, presentando definiciones de las nociones básicas: derivada e integral definida. Para ello, consideremos una función $y = f(x)$ definida en algún intervalo real $[a,b]$ y que esta función ha sido extendida al intervalo $[a,b]^*$, con los mismos extremos que el anterior, pero considerado en \mathbb{N} , esto es siempre factible¹⁰. Para encontrar (y definir) la derivada de f en un punto x dentro del intervalo $[a,b]$ calculamos el cociente $\{f(x+i)-f(x)\}/i$, donde i es un pequeño cualquiera, y tomamos su parte real. Para que este proceso defina un solo número es necesario que el cociente sea finito para todo i y que su parte real no dependa de ese i . Como ilustración, si $y = x^2$, entonces el cociente será $\{(x+i)^2-x^2\}/i = (2xi+i^2)/i = 2x+i$, cuya parte real es $2x$. Para calcular (y definir) la integral de f en el intervalo $[a,b]$ se elige un entero grande a , se define el número pequeño $i = (b-a)/a$ y se calcula la parte real de la sumatoria:

$$\begin{aligned} & h=\alpha \\ & \sum f(a+hi)i. \\ & h=1 \end{aligned}$$

Nuevamente, el resultado debe ser finito y su parte real no depender de la α elegida. Así, por ejemplo $\int x dx$ entre los límites 0 y 1 estará calculada por la expresión $\sum h^2 = i^2 \sum h = i^2 \alpha(\alpha+1)/2 = 1/2+i/2$, ya que en este caso $i = 1/\alpha$, por lo cual la integral vale $1/2$, que es la parte real.

No iremos más a fondo en estos aspectos técnicos, pero el lector puede consultar de la bibliografía los trabajos indicados si le interesa: la enseñanza elemental del cálculo¹¹, la multiplicidad de campos \mathbb{N}^{i2} , una propuesta para la enseñanza en escuelas de ingeniería¹³, las ecuaciones diferenciales¹⁴, la transformada de Fourier¹⁵ o las funciones generalizadas en ingeniería¹⁶.

Comentarios finales

Nos preguntamos ahora: ¿cómo convive esta categorización de lo infinito (grande y pequeño) con las observaciones presentadas al principio? Es fácil de constatar que va de acuerdo con la propuesta de Russell, si bien nos gusta más verla, no como negación del principio arquimediante, sino como una ampliación de ese principio que permite el uso de enteros infinitos (grandes); esto es, precisamente, lo que dice la condición (4) de campos \mathbb{N} . Creo que nada hay que comentar sobre la no-existencia (cantoriana) de infinitesimales, por simple aplicación del principio de: "ver para creer". Respecto a la expresión decimal 0.999... (ad infinitum), ésta se ve substituida por expresiones 0.999...9, que terminan en 9, pero el número de nueve es un entero grande; y la idea de que la primera es como 1, se concreta por el hecho de que las segundas difieren de 1 por un infinitesimal, es decir, su parte real es 1. Nuevas trompetas hiperbólicas infinitas se construyen haciendo girar el gráfico $y = 1/x$ (con $x \in [1, \alpha]$, α grande), estas trompetas terminan

donde $x = \alpha$, ahí puede colocarse la boquilla, y si tienen centro de gravedad; situación que no contradice esencialmente a Wallis y, queremos pensar, pudo haber dejado satisfecho a Hobbes. Los famosos indivisibles, sin entrar en detalles, pueden materializarse con ayuda de los números pequeños, de manera que concreten el papel que en el siglo XVII les asignaban Cavalieri y Torricelli, entre otros.

De alguna manera hemos tratado, en este breve escrito, de cerrar un círculo narrativo, que no histórico, sobre ciertos avatares del infinito. Muchas cosas han quedado fuera, particularmente la contribución del Robinson⁴, la cual creemos que no ha sido debidamente analizada hasta la fecha, pero esas cosas deben ser materiales para otros estudios.

Terminemos con un comentario; disponer de una categorización de lo infinito, al estilo de la aquí presentada, puede facilitarnos sujetar al cálculo a un escrutinio como el que propuso Wittgenstein y también puede reeditar mucho en los problemas de enseñanza y aprendizaje del cálculo, sobre todo para aquellos que abordan el tema como herramienta; pero permite, además, abrir perspectivas nuevas para abordar temas matemáticos, antiguos y modernos, como la teoría de probabilidades y la teoría del caos, por mencionar sólo dos.



Notas

1. J.A. Robles, Las ideas matemáticas de George Berkeley (Imprenta Universitaria, UNAM, 1993).
2. B. Russell, Recent work in the philosophy of Mathematics, The International Monthly 4 (1902).
3. B. Russell, The Principles of Mathematics (Cambridge University Press, Inglaterra, 1903).
4. A. Robinson, Non-standard Analysis (North Holland, Holanda, 1966).
5. R. Rucker, Infinity and the mind (Princeton University Press, EUA, 1995).
6. D. Jesseph, Squaring the circle. The war between Hobbes and Wallis (University of Chicago Press, EUA, 1999).
7. [www.maa.org/CGI-BIN/WA.EXE?A1 = ind9903&L = math-history-list](http://www.maa.org/CGI-BIN/WA.EXE?A1=ind9903&L=math-history-list)

8. L. Wittgenstein, Zettel (Imprenta Universitaria, UNAM, 1985).

9. C. Imaz, "Una alternativa teórica del Cálculo" en Investigaciones en Matemática Educativa I, Fernando Hitt, ed. (Grupo Editorial Iberoamérica, 1996).

10. C. Imaz, "Infinitesimal models for real analysis", Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 22, 2 (Inglaterra, 1991).

11. R. Salat, Elaboración, prueba y análisis de un modelo infinitesimal del Cálculo, tesis doctoral, Cinvestav (1993).

12. E. Sélem, "n-extensiones propias de \aleph_n de cardinales \aleph_n ", tesis doctoral, Cinvestav (1998).

13. I. Arcos, Acerca de la enseñanza del Cálculo en escuelas de ingeniería. Un acercamiento infinitesimalista, tesis doctoral, Cinvestav (1999).

14. C. Imaz, "Breve teoría infinitesimalista de las ecuaciones diferenciales", en Investigaciones en Matemática Educativa II, Fernando Hitt, ed. (Grupo Editorial Iberoamérica, 1998).

15. K. George, El cálculo discreto infinitesimal y la didáctica de la transformada de Fourier, tesis doctoral, Cinvestav (1998).

16. P. Camarena, Las funciones generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica, tesis doctoral, Cinvestav (en prensa, Editorial ANUIES, 1999).

